یا

$$-\frac{n}{۲}\ln(\hat{\sigma}^۲/\sigma^۲) \geq -\frac{n}{۲}(\hat{\sigma}^۲/\sigma^۲) + \frac{n}{۲} - \frac{n}{۲\sigma^۲}(\hat{\mu}-\mu)^۲$$

یا (با توجه به اینکه $۰ \geq (\frac{n}{۲\sigma^۲}(\hat{\mu}-\mu)^۲$)

$$-\frac{n}{۲}\ln(\hat{\sigma}^۲/\sigma^۲) \geq -\frac{n}{۲}(\hat{\sigma}^۲/\sigma^۲) + \frac{n}{۲}$$

و رابطهٔ فوق، با توجه به نامساوی $\ln x \leq x - ۱$ ، همواره درست است.

راه حل دوم:

در حقیقت زمانی که بیش از یک پارامتر نامعلوم در مسئله مطرح است، مثل این مسئله که با دو پارامتر نامعلوم در آن مواجه‌ایم، برای نشان دادن اینکه ریشه‌های معادلات درستنمایی MLE پارامترها را به دست می‌دهند، نیاز به محاسبهٔ مقادیر زیر داریم:

$$\begin{aligned}
a_{۱۱} &= \frac{\partial^۲}{\partial\mu^۲}\ell(\mu,\sigma^۲)|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^۲=\hat{\sigma}^۲} \\
a_{۱۲} &= \frac{\partial^۲}{\partial\mu\partial\sigma^۲}\ell(\mu,\sigma^۲)|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^۲=\hat{\sigma}^۲} \\
a_{۲۱} &= \frac{\partial^۲}{\partial\sigma^۲\partial\mu}\ell(\mu,\sigma^۲)|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^۲=\hat{\sigma}^۲} \\
a_{۲۲} &= \frac{\partial^۲}{\partial(\sigma^۲)^۲}\ell(\mu,\sigma^۲)|_{\mu=\hat{\mu},\sigma^۲=\hat{\sigma}^۲}
\end{aligned}$$

(توجه داشته باشید که معمولاً $a_{۱۲} = a_{۲۱}$) تا نشان دهیم که ماتریس A با درایه‌های a_{ij}، $i,j = ۱,۲$ ، یک ماتریس "همیشه منفی" است.

در این مثال به سادگی می‌توان نشان داد که

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-۱}{\hat{\sigma}^۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{-n}{۲(\hat{\sigma}^۲)^۲} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس همیشه منفی است.

راه حل سوم:

با توجه به ریشه‌های معادلات درستنمایی می‌دانیم که

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^۲ \geq \sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲ \ , \ \forall\mu\in(-\infty,\infty)$$

در نتیجه برای هر مقدار ثابت و مثبت $\sigma^۲$ داریم:

$$L(\hat{\mu},\sigma^۲) \geq L(\mu,\sigma^۲) \ , \ \forall\mu\in(-\infty,\infty)$$

$N(\mu, \sigma^۲)$ باشد که در آن $\mu \in (-\infty, \infty)$ ، $\sigma^۲ \in (۰, \infty)$ هر دو نامعلوم‌اند. MLE پارامترهای $\mu, \sigma^۲$ را به دست آورید.

حل به سادگی تحقیق می‌شود که تابع درستنمایی برابر است با:

$$L(\mu, \sigma^۲) = (۲\pi\sigma^۲)^{-\frac{n}{۲}} \exp\{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \mu)^۲\}$$

و

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma^۲) &= \ln L(\mu, \sigma^۲) \\ &= -\frac{n}{۲}\ln(۲\pi\sigma^۲) - \frac{۱}{۲\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \mu)^۲ \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^۲) = \frac{۱}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \mu) \\ \frac{\partial}{\partial\sigma^۲}\ell(\mu, \sigma^۲) = \frac{-n}{۲\sigma^۲} + \frac{۱}{۲\sigma^۴}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \mu)^۲ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\mu}\ell(\mu, \sigma^۲) = ۰ \\ \frac{\partial}{\partial\sigma^۲}\ell(\mu, \sigma^۲) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ \end{cases}$$

راه حل اول:

برای اینکه نشان دهیم $\hat{\mu} = \bar{X}$ و $\hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$ ، باید نشان دهیم که:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^۲) \geq L(\mu, \sigma^۲) \ , \ \forall(\mu, \sigma^۲) \in \Theta$$

توجه داشته باشید که:

$$\begin{aligned} L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^۲) &= (۲\pi\hat{\sigma}^۲)^{-\frac{n}{۲}}e^{-\frac{n}{۲}} \\ L(\mu, \sigma^۲) &= (۲\pi\sigma^۲)^{-\frac{n}{۲}}\exp\{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}[n\hat{\sigma}^۲ + n(\hat{\mu} - \mu)^۲]\} \end{aligned}$$

پس باید نشان دهیم که برای هر $(\mu, \sigma^۲) \in \Theta$ ، داریم:

$$(۲\pi\hat{\sigma}^۲)^{-\frac{n}{۲}}e^{-\frac{n}{۲}} \geq (۲\pi\sigma^۲)^{-\frac{n}{۲}}\exp\{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}[n\hat{\sigma}^۲ + n(\hat{\mu} - \mu)^۲]\}$$

یا

$$-\frac{n}{۲}\ln\hat{\sigma}^۲ - \frac{n}{۲} \geq -\frac{n}{۲}\ln\sigma^۲ - \frac{n}{۲\sigma^۲}[\hat{\sigma}^۲ + (\hat{\mu} - \mu)^۲]$$

بنابراین با این روش مسئلهٔ پیدا کردن MLE پارامتر نامعلوم به مسئلهٔ یک پارامتری تقلیل می‌یابد حال به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $\sigma^۲(>۰)$ ،

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^۲)\geq L(\hat{\mu},\sigma^۲)$$

پس

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^۲)\geq L(\hat{\mu},\sigma^۲)\geq L(\mu,\sigma^۲)\ ,\ \forall(\mu,\sigma^۲)\in\Theta$$

در حقیقت راه حل سوم در مثال فوق روش ساده‌ای برای حل مسائلی با بیش از یک پارامتر نامعلوم ارائه می‌دهد که می‌توان آن را به صورت زیر تعمیم داد:

اگر $\boldsymbol{\theta}=(\theta_۱,\theta_۲)$ پس از تشکیل تابع درستنمایی $L(\theta_۱,\theta_۲)$ ، به ازای هر مقدار ثابت $\theta_۲$ ابتدا تابع درستنمایی را نسبت به $\theta_۱$ ماکزیمم می‌کنیم یعنی برای هر مقدار ثابت $\theta_۲$ و به ازا همهٔ مقادیر $\theta_۱$ داریم:

$$L(\hat{\theta}_۱,\theta_۲)\geq L(\theta_۱,\theta_۲)$$

بنابراین پیدا کردن MLE پارامترها به حالت یک پارامتری تقلیل می‌یابد که با روشهای ارائه شده به سادگی به دست می‌آید و خواهیم داشت

$$L(\hat{\theta}_۱,\hat{\theta}_۲)\geq L(\hat{\theta}_۱,\theta_۲)\geq L(\theta_۱,\theta_۲)\ ,\ \forall\boldsymbol{\theta}\in\Theta$$

که نشان می‌دهد $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\theta}_۱,\hat{\theta}_۲)$ یک MLE پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ است.

در بسیاری از موارد به خصوص در فصل آزمون نسبت درستنمایی با براورد ML برای بیش از یک پارامتر مواجه‌ایم که روش ارائه شده در بالا می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد اما به خاطر ساختار بعضی از این مسائل روش متعارف ساده‌تر خواهد بود. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۳ـ۲۲ فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع یکسان با تابع چگالی احتمال

$$f_{\theta_۱}(x)=\theta_۱x^{-(\theta_۱+۱)}\ ,\ x\geq ۱\ ,\ \theta_۱>۰$$

و $Y_۱,\cdots,Y_m$ یک نمونه تصادفی m تایی از توزیع یکسان با تابع چگالی احتمال

$$f_{\theta_۲}(y)=\theta_۲y^{-(\theta_۲+۱)}\ ,\ y\geq ۱\ ,\ \theta_۲>۰$$

باشند. همچنین فرض کنید دو نمونه مستقل از هم باشند.

الف- براورد ML پارامترهای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ را به ست آورید.

ب- در صورتی که داشته باشیم $\theta_۱=\theta_۲$ براورد ML پارامتر نامعلوم را به دست آورید.

حل به سادگی می‌توان نشان داد که تابع درستنمایی برابر است با

$$\begin{aligned}L(\theta_۱,\theta_۲)&=\{\Pi_{i=۱}^n f_{\theta_۱}(x_i)\}\{\Pi_{j=۱}^m f_{\theta_۲}(y_j)\}\\&=\theta_۱^n(\Pi_{i=۱}^n x_i)^{-(\theta_۱+۱)}\theta_۲^m(\Pi_{j=۱}^m y_j)^{-(\theta_۲+۱)}\end{aligned}$$